Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

4259 Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія» для студентів усіх інженерних спеціальностей денної форми навчання

Суми

Сумський державний університет

2017

Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія» / укладачі: Н. І. Одарченко, І. О. Шуда. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 35 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Розділ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1.1. Елементи лінійної алгебри

1. Матриці, їх види. Дії з матрицями.
2. Визначник матриці, його властивості, обчислення.
3. Обернена матриця. Необхідна і достатня умова існування оберненої матриці.
4. Система n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими, її матричний запис та розв’язок.
5. Формули Крамера.
6. Система однорідних лінійних рівнянь.

1.2. Елементи векторної алгебри

1. Лінійні операції над векторами.
2. Лінійна залежність та залежність векторів.
3. Базис на площині та в просторі.
4. Проекція вектора на вісь. Властивості проекцій.
5. Вектор у системі координат.
6. Модуль вектора. Напрямні косинуси.
7. Скалярний добуток векторів, його властивості та вираз у координатах.
8. Векторний добуток векторів, його властивості та вираз у координатах.
9. Мішаний добуток векторів, його властивості та вираз у координатах.
10. Умови колінеарності та компланарності векторів.

1.3. Аналітична геометрія

1. Полярна система координат.
2. Пряма на площині. Різні види рівняння прямої на площині. Відстань від точки до прямої.
3. Криві другого порядку – еліпс, гіпербола, парабола. Їх канонічні рівняння, властивості.
4. Рівняння площини за точкою та нормальним вектором.
5. Рівняння площини у «відрізках».
6. Взаємне розміщення двох площин.
7. Рівняння площини через три точки.
8. Відстань від точки до площини.
9. Пряма в просторі. Канонічні та параметричні рівняння прямої.
10. Поверхні другого порядку.

Розділ 2

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1. Лінійна та векторна алгебра

Задача 1.1. Обчислити визначник:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Це визначник 4-го порядку. Користуючись властивостями визначника, перетворимо його.

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left[3\,стр \cdot 2 + 4\,стр\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & 10 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі розкладаємо одержаний визначник за елементами 4-го стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{24} + (-2) \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44} = (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,стр \cdot (-2) + 2\,стр \\ 1\,стр \cdot (-1) + 3\,стр \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \left[3\,стр : 3\right] = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left[\text{розкладаємо за елементами 1-го стовпця}\right] =$$

$$= 6 \cdot (-6 + 5) = -6.$$

Відповідь: $\det = -6$

Завдання 1.1 (для самостійної роботи)

Обчислити визначник:

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k & 2k \\ 1 & 3 & -1 & (k-1) \\ 2 & 4 & 0 & k \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad k = \begin{cases} N, \text{ якщо } N \le 12; \\ N - 12, \text{ якщо } N > 12, \text{ де } N \ - \text{ номер вашого варіанта.} \end{cases}$$

Розв'язання:

Задача 1.2. Дано матриці: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Знайти добуток матриць $A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot C,\ C\cdot A,\ A\cdot D,\ D\cdot A$, якщо вони існують.

Розв'язання. Перемножити можна лише сумісні матриці – число стовпців першої матриці-співмножника дорівнює числу рядків другої. Отже, існують лише добутки $A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot C,\ A\cdot D$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 4+1\cdot(-2) \\ -2\cdot 1+5\cdot 0 & -2\cdot 4+5\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -2 & -18 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+4\cdot(-2) & 1\cdot 1+4\cdot 5 \\ 0\cdot 3+(-2)\cdot(-2) & 0\cdot 1+(-2)\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 4 & -10 \end{pmatrix};$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 7 & 3\cdot(-2)+1\cdot 3 & 3\cdot 3+1\cdot(-1) \\ -2\cdot 1+5\cdot 7 & -2\cdot(-2)+5\cdot 3 & -2\cdot 3+5\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -3 & 8 \\ 33 & 19 & -11 \end{pmatrix},$$

$C\cdot A$ не існує, бо рядок матриці C складається з трьох елементів, а стовпець матриці A – з двох;

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot(-3)+1\cdot 2 \\ -2\cdot(-3)+5\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 16 \end{pmatrix},$$

$D\cdot A$ не існує, оскільки в рядку матриці D один елемент, а в стовпці матриці A – два елементи.

Завдання 1.2 (для самостійної роботи)

Дано матриці A, B, C, D. Знайти добутки $A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot C,\ C\cdot A,\ A\cdot D,\ D\cdot A,$ якщо вони існують.

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k-2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & k & 5 \\ 0 & 3 & -k \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 2 & k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$k=\begin{cases} N, \text{ якщо } N\le 12; \\ N-12, \text{ якщо } N>12, \text{ де } N \end{cases}$$ – номер вашого варіанта.

Розв'язання

Задача 1.3. Знайти обернену матрицю для матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Користуючись формулою $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\left(\overline{A}\right)^{T}$, визначимо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=5+2\cdot 5+3\cdot 5=30\neq 0\,.$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=11,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=7,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ -1 & 11 & 7 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \left(\bar{A}\right)^T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 5 & 11 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix},\ A^{-1}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 5 & 11 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{30} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 5 & 11 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{30} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$

Завдання 1.3. Знайти обернену матрицю для матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$,

$$k=\begin{cases} N, \text{ якщо } N\le 12; \\ N-12, \text{ якщо } N>12, \text{ де } N - \text{номер вашого варіанта.} \end{cases}$$

Розв'язання

Задача 1.4. Записати матриці заданих систем рівнянь. Чи сумісні задані системи? Якщо сумісні, то розв'язати їх. Систему завдання б) розв'язати за формулами Крамера, матричним способом, методом Гаусса. Зробити перевірку.

$a)\ \begin{cases} 2x+3y=1, \\ -x+4y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

Розв'язання. Матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь складається з коефіцієнтів при невідомих:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-1)\cdot 3=11\neq 0$.

Оскільки визначник системи не дорівнює нулю, то ця система сумісна і має єдиний розв'язок.

$б)\ A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ – матриця системи.

Визначник системи:

$$\det A=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}=4\cdot 5\cdot(-2)+2\cdot 6\cdot 2+(-3)\cdot(-3)\cdot 5-2\cdot 5\cdot 5-2\cdot(-3)\cdot(-2)-4\cdot(-3)\cdot 6=$$

$=-40+24+45-50-12+72=39\neq 0$

Отже, ця система теж сумісна і має єдиний розв'язок.

Завдання 1.4 (для самостійної роботи)

Записати матриці заданих систем рівнянь. Чи сумісні задані системи? Якщо сумісні, то розв'язати їх за формулами Крамера, матричним способом, методом Гаусса. Зробити перевірку.

$a)\ \begin{cases} kx - y = k, \\ (k-2)x + 3y = 5 - k; \end{cases}$ б) $\begin{cases} kx + y - z = k, \\ 2x + y + (k-1)z = 1, \\ x + 3z = k - 10, \end{cases}$

$k = \begin{cases} N, \text{ якщо } N \le 12; \\ N - 12, \text{ якщо } N > 12, \text{ де } N \end{cases}$ – номер вашого варіанта.

Розв'язання

Задача1.5. Дано точки $A(1;2;-1)$ і $B(4;7;0)$. Зобразити в системі координат вектор $\overrightarrow{AB}$, знайти $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Який кут утворює вектор $\overrightarrow{AB}$ з віссю Оу?

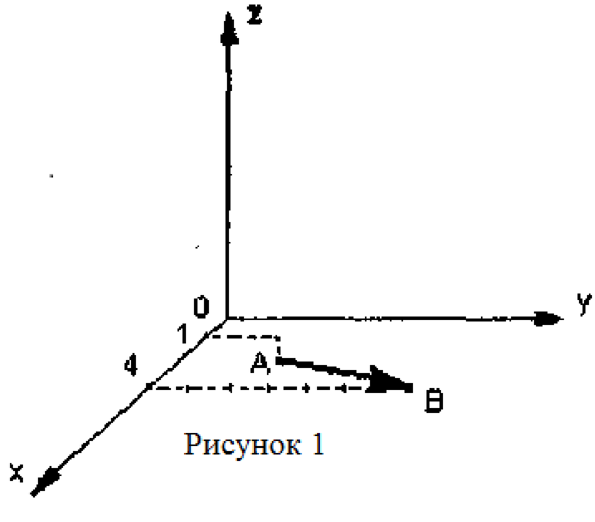

Рисунок 1

Розв'язання. Побудуємо точки A і B за їх координатами (рис. 1).

Знайдемо координати $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (4-1; 7-2; 0-(-1)) = (3;5;1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35}$.

Знаходимо косинус кута між вектором

і віссю Oy: $\cos\beta = \dfrac{np_y\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{5}{\sqrt{35}}$, $\beta = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{35}}$.

Примітка. Якщо знайдений косинус виявляється від'ємним $(\cos\beta = m < 0)$, то $\beta = \pi - \arccos m$

Завдання 1.5 (для самостійної роботи)

Дані точки $A(2; k-10; 3)$ і $B(k; k-15; -2)$.

$$k = \begin{cases} N, \text{ якщо } N \le 12; \\ N-12, \text{ якщо } N > 12, \text{ де } N \text{ – номер вашого варіанта.} \end{cases}$$

Зобразити в системі координат вектор $\overrightarrow{AB}$, знайти $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Які кути α, β і γ утворює $\overrightarrow{AB}$ з осями координат відповідно Ox, Oy, Oz ?

Розв'язання

Задача 1.6. Дані вектори $\vec{a}=\left(-2;3;5\right)$ і $\vec{b}=\left(10;1;-3\right)$. Знайти: а) $\overrightarrow{ab}$; б) $\vec{a}\times\vec{b}$; в) $np_{\vec{b}}\vec{a}$; г) орт вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Розв'язання: а) скалярний добуток визначаємо за формулою

$\overrightarrow{ab}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$, де a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$; b_x, b_y, b_z – координати вектора $\vec{b}$. Отже, $\overrightarrow{ab}=-2\cdot10+3\cdot1+5\cdot\left(-3\right)=-32$;

б) векторний добуток знаходимо за формулою $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти (одиничні вектори) осей координат відповідно Ox, Oy, Oz.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 5\\ 10 & 1 & -3\end{vmatrix}=\left(\text{розкриваємо визначник за елементами першого рядка}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 10 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 10 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=-14\vec{i}+44\vec{j}-32\vec{k}.$$

Отже, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(-14;44;-32\right)$;

в) проекцію вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ визначаємо через скалярний добуток: $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{ab}}{\left|\vec{b}\right|}$. У нашому випадку $\overrightarrow{ab}=-32$, $\vec{b}=\sqrt{10^2+1^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{110}$;

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=-\frac{32}{\sqrt{110}};$$

г) орт вектора $\vec{c}$ знаходимо за формулою $\vec{c}^{\,0}=\dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$. Потрібно вектор скоротити в $\left|\vec{c}\right|$ разів. Для цього необхідно кожну координату вектора розділити на його модуль:

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{14^2+44^2+32^2}=\sqrt{3156}=2\sqrt{789};$$

$$\vec{c}^{\,0}=\left(-\frac{14}{2\sqrt{789}};\frac{44}{2\sqrt{789}};-\frac{32}{2\sqrt{789}}\right)=\left(-\frac{7}{\sqrt{789}};\frac{22}{\sqrt{789}};-\frac{16}{\sqrt{789}}\right).$$

Примітка. Координати орта дорівнюють напрямним косинусам вектора

Завдання 1.6 (для самостійної роботи)

Дані вектори $\vec{a} = (k;\, 0;\, 5)$ і $\vec{b} = (1;\, 2;\, -1)$. Знайти: а) $\overrightarrow{ab}$; б) $\vec{a} \times \vec{b}$; в) $np_{\vec{b}}\vec{a}$; г) орт вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

$$k = \begin{cases} N, \text{ якщо } N \le 12; \\ N - 12, \text{ якщо } N > 12, \text{ де } N - \text{ номер вашого варіанта.} \end{cases}$$

Розв'язання

Задача 1.7

За координатами точок $A(1;\, -1;\, 2)$, $B(1;\, 4;\, -3)$, $C(5;\, 1;\, 0)$ визначити:

a) модуль вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$;
b) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;
c) проекцію вектора $\vec{c} = 2\vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;
d) координати точки M, якщо ділить відрізок $l = AB$ у відношенні 1:3.

Розв'язання:

a) знаходимо послідовно $\overrightarrow{AB}=(0;5;-5)$; $\overrightarrow{BC}=(4;-3;3)$;

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}(0;5;-5)+3\cdot(4;-3;3)=(0;5;-5)+(12;-9;9)=(12;-4;4)$,

$\left|\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{12^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{144+16+16}=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$;

b) маємо $\vec{a}=(12;-4;4)$; $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=(4;-3;3)$. Тоді

$\vec{a}\cdot\vec{b}=12\cdot 4+(-4)\cdot(-3)+4\cdot 3=48+12+12=72$;

c) оскільки $np_{\vec{d}}\vec{c}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}$; $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=(0;5;-5)$; $\vec{c}=2\vec{b}=2\overrightarrow{BC}=2(4;-3;3)=(8;-6;6)$,

$\vec{c}\cdot\vec{d}=(8;-6;6)\cdot(0;5;-5)=0-30-30=-60$; $\left|\vec{d}\right|=\sqrt{0^2+5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$,

$np_{\vec{d}}\vec{c}=\dfrac{-60}{5\sqrt{2}}=\dfrac{-12}{\sqrt{2}}=\dfrac{-12\cdot\sqrt{2}}{2}=-6\sqrt{2}$;

d) маємо $\lambda=\dfrac{1}{3}$, $r_m=\dfrac{r_A+\lambda r_B}{1+\lambda}$. Отже, $x_m=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\dfrac{1+\frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}}=1$,

$$y_m=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4},\ z_m=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4},$$

$M\left(1;\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

Завдання 1.7 (для самостійної роботи)

За координатами точок $A(k;k+1;k-1)$, $B(0;k+2;k-2)$, $C(2k;k;-k)$ визначити:

a) модуль вектора $\vec{a}=k\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;

b) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}=(k+1)\overrightarrow{BC}$;

c) проекцію вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=2\overrightarrow{AB}$;

d) координати точки M, що ділить відрізок $l=AB$ у відношенні 1:k;

k – номер студента в групі.

Розв'язання

Задача 1.8

Дані вектори $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$. Необхідно:

a) обчислити добуток векторів $\vec{a},\ \vec{b}$ і $3\vec{c}$;

b) знайти модуль векторного добутку $2\vec{c}$ і $\vec{b}$;

c) обчислити скалярний добуток веторів $\vec{a}$ і $2\vec{b}$;

d) перевірити, чи будуть колінеарні або ортогональні вектори $\vec{a}$ і $-\vec{b}$;

e) перевірити, чи будуть компланарні ветори $\vec{a},\ \vec{b}$ і $2\vec{c}$.

Розв'язання:

a) оскільки $\vec{a}=(4;0;1)$, $\vec{b}=(1;-3;2)$, $\vec{c}=(-3;5;0)$, $3\vec{c}=3(-3;5;0)=(-9;15;0)$, то

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot 3\vec{c}=\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ -9 & 15 & 0\end{vmatrix}=0+0+15-(27+0+120)=15-147=-132;$$

b) оскільки $\vec{c}=(-3;5;0)$, $2\vec{c}=(-6;10;0)$, $\vec{b}=(1;-3;2)$, то

$$2\vec{c}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 10 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}10 & 0\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-6 & 10\\ 1 & -3\end{vmatrix}=20\vec{i}-12\vec{j}+8\vec{k},$$

$$\left|2\vec{c}\times\vec{b}\right|=\sqrt{20^2+(-12)^2+8^2}=\sqrt{400+144+64}=\sqrt{608}=4\sqrt{38};$$

c) знаходимо $2\vec{b}=2(1;-3;2)=(2;-6;4)$, $\vec{a}=(4;0;1)$. Тоді

$\vec{a}\cdot 2\vec{b}=(4;0;1)\cdot(2;-6;4)=8+0+4=12$;

d) $\vec{a}=(4;0;1)$, $-\vec{b}=(-1;3;-2)$. $\dfrac{\vec{a}}{-\vec{b}}:\dfrac{4}{-1}\neq\dfrac{0}{3}\neq\dfrac{1}{-2}$, то вектори $\vec{a}$ і $-\vec{b}$ неколінеарні;

e) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $2\vec{c}$ компланарні, якщо $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot 2\vec{c}=0$,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot 2\vec{c}=\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ -6 & 10 & 0\end{vmatrix}=0+0+10-(18+0+80)=10-98=-88\neq 0,$$ отже,

вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $2\vec{c}$ некомпланарні.

Задача 1.8 (для самостійної роботи)

Дані вектори $\vec{a}=k\vec{i}+(k+1)\vec{j}+(k-1)\vec{k}$, $\vec{b}=-k\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=(k+2)\vec{i}-2k\vec{j}$. Необхідно:

a) обчислити добуток векторів $k\vec{a}$, $\vec{b}$ і $2\vec{c}$;

b) знайти модуль векторного добутку $\vec{c}$ і $(k+1)\vec{b}$;

c) обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $k\vec{c}$;

d) перевірити, чи будуть колінеарні або ортогональні вектори $\vec{a}$ і $(k+2)\vec{b}$;

e) перевірити, чи будуть компланарні вектори $\vec{a}$, $k\vec{b}$ і $(3+k)\vec{c}$.

Розв'язання

Задача 1.9

Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2;-3;1)$, $B(4;-7;3)$, $C(-1;2;1)$, $D(-2;0;1)$. Обчислити:

a) площу грані ABC;
b) об'єм піраміди ABCD.

Розв'язання:

a) відомо, що $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Знаходимо: $\overrightarrow{AB}=(2;-4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;5;0)$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 5 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 5\end{vmatrix}=-10\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}\,.$$

Маємо $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-10)^2+(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{100+36+4}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$,

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{35}=\sqrt{35}$;

b) оскільки $V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$, $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 5; 0)$,

$\overrightarrow{AD} = (-4; 3; 0)$,

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-18-(-40+0+0) = -18+40 = 22.$$ Отже,

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\cdot 22 = \frac{11}{3}.$$

Задача 1.9 (для самостійної роботи)

Вершини піраміди знаходяться в точках $A(k; k+1; -k)$, $B(-2k; k-3; k)$, $C(-k; 0; k+2)$, $D(k-3; k; 1)$. Обчислити:

a) площу грані ABC;
b) об'єм піраміди ABCD.

Розв'язання

Задача 1.10

Сила $\vec{F}=(-2;1;-5)$ прикладена до точки $A(1;2;-1)$. Обчислити:

a) роботу сили $\vec{F}$ у разі, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається з положення А в положення $B(1;4;0)$;

b) модуль моменту сили $\vec{F}$ відносно точки В.

Розв'язання:

a) момент сили $\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$, $\overrightarrow{BA}=(0;-2;-1)$,

$$\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & -5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=11\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}.$$ Отже,

$$\left|\vec{M}\right|=\sqrt{11^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{121+4+16}=\sqrt{141}.$$

Задача 1.10 (для самостійної роботи)

Сила $\vec{F}=(-k;k+1;k-2)$ прикладена до точки $A(k;2k;-(k-1))$. Обчислити:

a) роботу сили $\vec{F}$ у разі, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається з положення А в положення $B(k+1;-2k;k)$;

b) модуль моменту сили $\vec{F}$ відносно точки В.

Розв'язання

2.2. Аналітична геометрія

Задача 2.1. Задано прямі на площині: $3x-2y-6=0$ (1), $x-5y-5=0$ (2).

Знайти:

a) їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2;

b) нормальні вектори $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$;

c) кут між прямими;

d) відрізки, що відтинають прямі на осях координат;

e) побудувати ці прямі.

Розв'язання:

a) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y=kx+b$. Розв'яжемо (1), (2) відносно у: (1') $y=\frac{3}{2}x-3$; (2') $y=\frac{1}{5}x-1$. Отже, $k_1=\frac{3}{2}$; $k_2=\frac{1}{5}$;

b) загальне рівняння прямої на площині має вигляд $Ax+By+C=0$, де коефіцієнти А і В є координатами нормального вектора до прямої: $\vec{n}=(A,B)$;

$\overrightarrow{n_1}=(3,-2)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,-5)$;

c) кут φ між прямими можна визначити або за кутовими коефіцієнтами за формулою $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, або за нормальними векторами: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$;

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{13}{10}}{\frac{13}{10}}=-1$. Оскільки одержали від'ємне число, то ми знайшли тупий кут (більший із двох суміжних кутів): $\varphi=135^\circ$. Гострий кут буде становити $180^\circ-135^\circ=45^\circ$;

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot1+(-2)\cdot(-5)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-5)^5}}=\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^\circ;$$

d) рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a і b – відповідно відрізки, які відтинає пряма на осях координат.

Запишемо задані рівняння у відрізках (перенесемо вільний член у праву частину та поділимо обидві частини рівняння на нього):

$$3x-2y=6\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow a_1=2,\ \mathrm{b}_1=-3,$$

$$x-5y=5\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\Rightarrow a_2=5,\ b_2=-1;$$

e) побудуємо прямі за відрізками на осях (рис. 2).

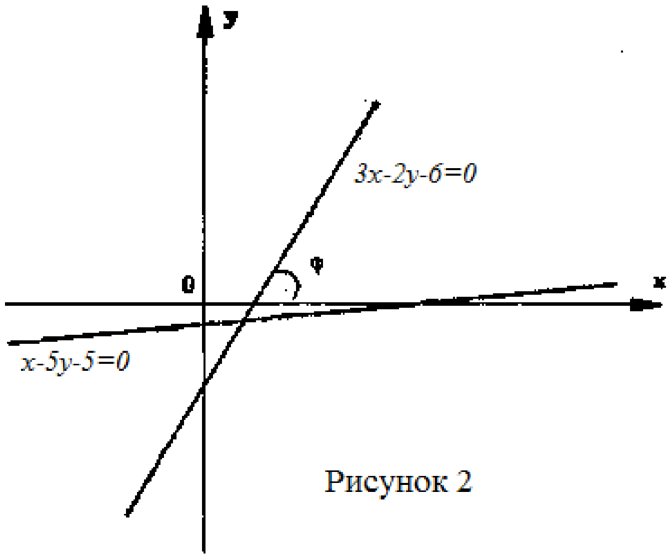

Рисунок 2

Для побудови прямої за її рівнянням досить знайти будь-які дві її точки. Найзручніше знаходити точки перетину з осями координат. Для цього задати $y=0$ (рівняння осі Ox) і знайти точку $A(a;0)$ (a – відрізок, що відтинає пряма на осі Ox), потім задати $x=0$ (рівняння осі Oy) і знайти точку $B(0;b)$ (b – відрізок, що відтинає пряма на осі Oy).

Якщо рівняння прямої не містить вільного члена (C = 0), то пряма проходить через початок координат. У цьому разі достатньо знайти ще одну точку $(x_0;\ y_0)$ прямої, задавши зручне значення $x=x_0$, знайти y_0.

Завдання 2.1 (для самостійної роботи)

Для заданих прямих $kx+(k+1)y+5=0$ (1), $2kx+(k-3)y+(k+2)=0$ (2) на площині знайти:

a) їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2;
b) нормальні вектори $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$;
c) кут між прямими;
d) відрізки, що відтинають прямі на осях координат;
e) побудувати ці прямі.

Розв'язання

Задача 2.2. Дано точки $A(1;3)$, $B(0;2)$, $C(-1;4)$. Скласти рівняння прямої (AB) і прямої, що проходить через точку С перпендикулярно до (AB).

Розв'язання. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Звідки рівняння (AB): $\dfrac{x-1}{0-1}=\dfrac{y-3}{2-3}\Rightarrow -(x-1)=-(y-3)\Rightarrow x-y+2=0$.

Рівняння прямої, що проходить через точку С $\perp$ (AB), можна одержати двома способами:

1) скористаємося рівнянням прямої за точкою та кутовим коефіцієнтом $y-y_0=k(x-x_0)$.

Шукана пряма $\perp$ до (AB) за умовою перпендикулярності $k=-\dfrac{1}{k_{AB}}$;

$k_{AB}=1$, отже, $k=-1$, ми одержуємо рівняння $y-4=-1(x-(-1))\Rightarrow x+y-3=0$;

2) скористаємося рівнянням прямої за точкою та нормальним вектором

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0,\text{ де } \vec{n}=\left(A;\,B\right).$$

Оскільки шукана пряма $\perp$ до $\left(AB\right)$, то за нормальний вектор $\vec{n}$ можна взяти $\overrightarrow{AB}$;

$\vec{n}=\left(0-1;\,2-3\right)=\left(-1;\,-1\right)$. Одержимо рівняння $-1\left(x-\left(-1\right)\right)-1\left(y-4\right)\Rightarrow x+y-3=0$.

Завдання 2.2 (для самостійної роботи)

Дано точки $A\left(\mathrm{k};\,3\right)$, $B\left(2;\,k\right)$, $C\left(1;\,2\right)$.

$$k=\begin{cases} N,\text{ якщо } N\le 12; \\ N-12,\text{ якщо } N>12,\text{ де } N\ -\ \text{номер вашого варіанта.}\end{cases}$$

Скласти рівняння прямої $\left(AB\right)$ і прямої, що проходить через точку С перпендикулярно до $\left(AB\right)$.

Розв'язання

Задача 2.3

Дано вершини трикутника ABC: $A(-4;2)$, $B(1;-3)$, $C(2;5)$. Знайти:

a) рівняння сторони AB;
b) рівняння висоти CH;
c) рівняння медіани AM;
d) точку перетину медіани AM і висоти CH;
e) відстань від точки C до прямої AB;
f) кут між прямими AB і AC;
g) рівняння прямої, що проходить через вершину C, паралельно прямій AB.

Розв'язання:

a) скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, і одержимо рівняння сторони AB: $\frac{x+4}{1+4}=\frac{y-2}{-3-2}$, $\frac{x+4}{5}=\frac{y-2}{-5}$. Звідси $-5(x+4)=5(y-2)$, $-x+4=y-2$, $y+x-6=0$;

b) скористаємося рівнянням $y-y_1=k(x-x_1)$. Кутовий коефіцієнт прямої AB: $y+x-6=0$, $y=-x+6$, $k_{AB}=-1$. Враховуючи умову перпендикулярності прямих AB і CH: $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1 \Rightarrow k_{CH}=\frac{-1}{k_{AB}}$, $k_{CH}=\frac{-1}{-1}=1$. За точкою $C(2;5)$ і кутовим коефіцієнтом $k_{CH}=1$ складаємо рівняння висоти CH: $y-5=1(x-2)$, $y-5-x+2=0$, $y-x-3=0$;

c) за відомими формулами $x_m=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_m=\frac{y_1+y_2}{2}$ знаходимо координати x, y середини M відрізка BC: $x_m=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$, $y_m=\frac{-3+5}{2}=1$, $M\left(\frac{3}{2};1\right)$. Тепер за двома відомими точками $A(-4;2)$, $M\left(\frac{3}{2};1\right)$ складаємо рівняння медіани AM:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, $\frac{x+4}{\frac{3}{2}+4}=\frac{y-2}{1-2}$, $\frac{x+4}{\frac{11}{2}}=\frac{y-2}{-1}$, $\frac{11}{2}(y-2)=-x-4$,

$\frac{11y}{2}-11+x+4=0$, $\frac{11}{2}y+x-7=0$, $11y+2x-14=0$;

d) для знаходження координат точки N перетину медіани AM і висоти CH складаємо систему рівнянь: $\begin{cases}11y+2x-14=0\\ y-x-3=0\end{cases}$ або $\begin{cases}2x-11y=14\\ -x+y=3\end{cases}$. Розв'язуємо цю систему за формулами Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 11 = -9$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & -11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 33 = 47$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 14 = 20$, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{47}{-9} =$, $y = \frac{20}{-9}$.

Отже, $N\left(-\frac{47}{9}; -\frac{20}{9}\right)$;

e) скористаємося формулою відстані від точки до прямої: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

маємо, що точка $C(2;5)$, пряма AB: $2 + y - 6 = 0$ і відстань $d = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 - 6}{\sqrt{1+1}} = \frac{3 + 6 - 6}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$;

f) для знаходження кута між прямими AB і AC скористаємося рівняннями цих прямих:

AB: $x + y - 6 = 0$,

AC: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $\frac{x+4}{2+4} = \frac{y-2}{5-2}$, $\frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{3}$, $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{1}$,

$x + 4 = 2(y-2)$, $x + 4 - 2y + 4$, $x - 2y + 8 = 0$.

Як кут між прямими беруть кут між їх нормалями: $\vec{n}_{AB} = (1;1)$, $\vec{n}_{AC} = (1;-2)$.

Тоді $\vec{n}_{AB} \cdot \vec{n}_{AC} = |\vec{n}_{AB}| \cdot |\vec{n}_{AC}| \cdot \cos\alpha$, $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \cos\alpha$,

$-1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$;

g) скористаємося формулою $y - y_0 = k(x - x_0)$. Оскільки прямі, які паралельні, мають однакові кутові коефіцієнти, то $k = k_{AB} = -1$. Отже, $y - 5 = -1(x - 1)$, оскільки $C(2;5)$, $y - 5 = -x + 2$, $y + x - 7 = 0$.

Задача 2.3 (для самостійної роботи)

Дано вершини трикутника ABC: $A(-k; k; k-4)$, $B(2k; -k; k-3)$, $C(k; -k; k+2)$.

Знайти:

a) рівняння сторони AB;
b) рівняння висоти CH;
c) рівняння медіани AM;
d) точку перетину медіани AM і висоти CH;
e) відстань від точки C до прямої AB;
f) кут між прямими AB і AC;
g) рівняння прямої, що проходить через вершину C, паралельно прямій AB.

Розв'язання

Задача 2.4

Дано чотири точки: $A(4;1;7)$, $A_2(-1;2;0)$, $A_3(2;4;9)$, $A_4(-1;4;9)$.

Скласти рівняння:

a) площини $A_1A_2A_3$;
b) прямої A_1A_2;
c) прямої A_4M, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;
d) прямої A_4N, паралельної прямій A_1A_2.

Обчислити:

e) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;

f) косинус кута між площиною $A_1A_2A_3$ і площиною $A_1A_2A_4$.

Розв'язання:

a) використаємо формулу рівняння площини, що проходить через три точки, і складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-7 \\ -1-4 & 2-1 & 0-7 \\ 2-4 & 4-1 & 9-7 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-7 \\ -5 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}+(z-7)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$23(x-4)+24(y-1)-13(z-7)=0,$$

$23x-92+24y-24-13z+91=0$; $23x+24y-13z-25=0$ – рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Перевірка. Підставимо в одержане рівняння координати однієї з точок, наприклад, $A_1(4;1;7)$; $23\cdot 4+24\cdot 1-13\cdot 7-25=0$; $0=0$ – отже, рівняння записано правильно;

b) врахуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тоді рівняння прямої A_1A_2 можна записати у вигляді $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-7}{-7}$;

c) з умови перпендикулярності прямої A_4M і площини $A_1A_2A_3$ випливає, що за напрямний вектор прямої $\vec{S}$ можна взяти нормальний вектор $\vec{n}=(42;24;-13)$ площини $A_1A_2A_3$.

Тоді рівняння прямої A_4M з урахуванням канонічного рівняння прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{k}$; $\frac{x+1}{23}=\frac{y-4}{24}=\frac{z-9}{-13}$, врахуємо, що точка $A_4(-1;4;9)$;

d) оскільки пряма A_4M паралельна прямій A_1A_2, то їх напрямні вектори $\vec{S}_1$ і $\vec{S}_2$ можна вважати збіжними: $\vec{S}_1=\vec{S}_2=(-5;1;-7)$. Тоді рівняння прямої A_4N має вигляд $\frac{x+1}{-5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-9}{-7}$;

e) якщо площина задається рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}\left(A;B;C\right)$, а пряма задається рівнянням $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{k}$, $\vec{s}\left(m;\ p;k\right)$, то кут між прямою і площиною визначається за формулою

$$\sin\varphi=\frac{A\cdot m+B\cdot p+C\cdot k}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+m^2+k^2}}.$$

Тоді з рівняння прямої A_1A_4: $\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-1}{4-1}=\frac{z-7}{9-7}$ або $\frac{x-4}{-5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-7}{2}$,

$\vec{S}=\left(-5;3;2\right)$. А з рівняння площини $23x+24y-13z-25=0$; $\vec{n}\left(23;24;-13\right)$.

Тоді $\sin\varphi=\left|\frac{23\cdot(-5)+24\cdot3-13\cdot2}{\sqrt{23^2+24^2+(-13)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+3^2+2^2}}\right|=\left|\frac{-69}{\sqrt{1274}\cdot\sqrt{38}}\right|$;

f) запишемо рівняння площини $A_1A_2A_4$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-7 \\ -1-4 & 2-1 & 0-7 \\ -1-4 & 4-1 & 9-7 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-7 \\ -5 & 1 & -7 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}+(z-7)\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$(x-4)(2+21)-(y-1)(-10-35)+(z-7)(-15+6)=0$,

$23(x-4)+45(y-1)-10(z-7)=0$, $23x+45y-10z-67=0$ – рівняння площини $A_1A_2A_4$;

$\vec{n}\left(23;45;-10\right)$. Перевірка. $23\cdot(-1)+45\cdot2-10\cdot0-67=-23+90-67=0$, $0=0$.

Якщо площини задані своїми рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$, то кут між площинами обчислюється за формулою $\cos\alpha=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Тоді з рівнянь площин $42x+24y-13z-101=0$, $\vec{n}_1=\left(23;24;-13\right)$ і $23x+45y-10z-67=0$, $\vec{n}_2=\left(23;45;-10\right)$.

$$\cos\alpha=\frac{23\cdot23+24\cdot45+(-13)\cdot(-10)}{\sqrt{23^2+24^2+(-13)^2}\cdot\sqrt{23^2+45^2+(-10)^2}}=\frac{1739}{\sqrt{1274}\cdot\sqrt{2654}}=0,95.$$

Задача 2.4 (для самостійної роботи)

Дано чотири точки: $A\left(k;-k;k+1\right)$, $A_2\left(0;2k;-k\right)$, $A_3\left(k-1;k-2;3+k\right)$, $A_4\left(-2k;k-3;k+4\right)$.

Скласти рівняння:

a) площини $A_1A_2A_3$;
b) прямої A_1A_2;
c) прямої A_4M, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;
d) прямої A_4N, паралельної прямій A_1A_2.

Обчислити:

e) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;
f) косинус кута між площиною $A_1A_2A_3$ і площиною $A_1A_2A_4$.

Розв'язання

Задача 2.5

Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ і площини $3x-y+2z-8=0$.

Розв'язання

Запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-7}{5}=t,\ \begin{matrix} x-7=5t \\ x=5t+7 \end{matrix},\ \frac{y-1}{1}=t,\ \begin{matrix} y-1=t \\ y=t+1 \end{matrix},\ \frac{z-5}{4}=t,\ \begin{matrix} z-5=4t \\ z=4t+5 \end{matrix}.$$

Підставимо значення $x=5t+7$, $y=t+1$, $z=4t+5$ у рівняння площини і визначимо параметр t: $3(5t+7)-(t+1)+2(4t+5)-8=0$; $15t+21-t-1+8t+10-8=0$, $22t+22=0$, $t=-1$. Тоді точка $N(2;0;1)$ – точка перетину прямої її площин.

Задача 2.5 (для самостійної роботи)

Знайти точку перетину прямої, що проходить через точки $A_1(-k;k;k+1)$; $A_2(k-1;-(k+1);k)$ і площини $(k+1)x-2y+kz+1=0$.

Розв'язання

Задача 2.6

Пряма задана загальним рівнянням $\begin{cases} x-y+2z+4=0, \\ 3x+y-5z-8=0. \end{cases}$

Записати її канонічне рівняння.

Розв'язання

Знаходимо вектори нормалі кожної площини $\vec{n}_1 = (1; -1; 2)$; $\vec{n}_2 = (3; 1; -5)$.

Визначаємо напрямний вектор $\vec{S}$ нашої прямої:

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 11\vec{j} + 4\vec{k} .$$

Знаходимо точку, що належить нашій прямій, із системи $\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

Нехай $z = 0$. Тоді $\begin{cases} x - y + 4 = 0, & 4x - 4 = 0, & 1 - y + 4 = 0, \\ 3x + y - 8 = 0, & x = 1, & y = 5. \end{cases}$

Точка $M_0(1;5;0)$ лежить на цій прямій. Її канонічне рівняння має вигляд

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{11} = \frac{z}{4} .$$

Задача 2.6 (для самостійної роботи)

Пряма задана загальним рівнянням $\begin{cases} kx - y + (k+1)z - 6 = 0, \\ (3-k)x + y + (k+2)z + 12 = 0. \end{cases}$

Записати її канонічне рівняння.

Розв'язання

Задача 2.7. Які лінії визначаються рівняннями:

a) $x^2 = 2y - 1$;

b) $x^2 + 2x + y^2 = 15$;

c) $9x^2 + 4y^2 = 36$;

d) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$?

Побудуйте ці лінії, зазначте їх параметри.

Розв'язання

Це лінії другого порядку, тому що визначаються рівняннями другого степеня. Для визначення параметрів лінії та побудови її необхідно рівняння звести до канонічного вигляду:

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – еліпс із вершиною в точці $C(x_0; y_0)$; a і b – півосі;

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – гіпербола з центром у точці $C(x_0; y_0)$; a – дійсна піввісь; b – уявна. Фокуси лежать на осі Ох. $F_1(x_0 - c; y_0)$ $F_2(x_0 + c; y_0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, асимптоти: $y - y_0 = \pm\left(\dfrac{b}{a}\right)(x - x_0)$;

$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ - парабола з вершиною у точці $C(x_0; y_0)$, вісь симетрії паралельна Оу, р – параметр (відстань від бісектриси до фокуса);

$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ – парабола з вершиною у точці $C(x_0; y_0)$, вісь симетрії паралельна Ох, р – параметр;

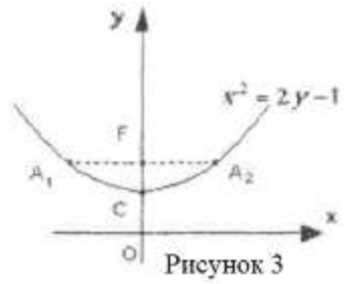

Рисунок 3

a) $x^2 = 2y - 1 \Rightarrow x^2 = 2\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$ – парабола з вершиною $C\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, параметр $p = 1$, вісь симетрії Оу, фокус лежить на осі Оу на відстані від вершини $F(0;1)$. Точки A_1 і A_2 (допоміжні для побудови лінії) віддалені від фокуса на відстань р = 1 (за основною властивістю параболи);

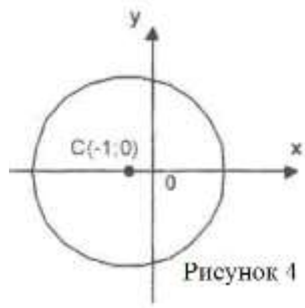

Рисунок 4

b) $x^2+2x+y^2=15$. Для зведення до канонічного вигляду виділимо повний квадрат при x:

$\left(x^2+2x+1\right)-1+y^2=15 \Rightarrow \left(x+1\right)^2+y^2=16$ – це рівняння кола з центром $C\left(-1;0\right)$, $R=4$;

c) $9x^2+4y^2=36 \Rightarrow$ (поділимо на 36) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ – еліпс із центром $O\left(0;0\right)$, півосі $a=2$ (по осі Ox) і $b=3$ (по осі Oy) (рис. 5);

d) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. Це канонічне рівняння гіперболи з центром $O\left(0;0\right)$, півосі $a=2$, $b=3$. Фокуси на осі Ox, $c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$.

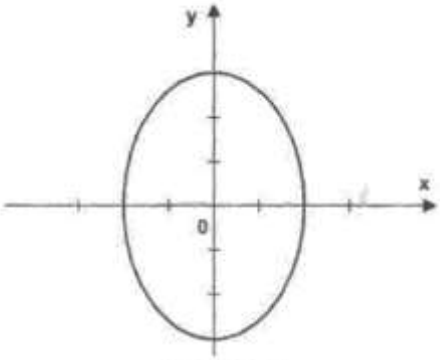

Рисунок 5

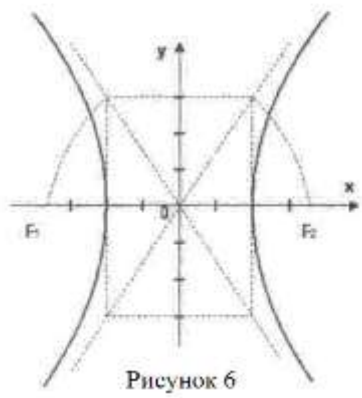

Рисунок 6

Асимптоти: $y=\frac{3}{2}x$, $y=-\frac{3}{2}x$ (рис. 6).

Завдання 2.7 (для самостійної роботи)

Які лінії визначаються заданими рівняннями? Побудуйте ці лінії, зазначте їх основні параметри.

Ном. вар.	Рівняння ліній	Ном. вар.	Рівняння ліній
1	а) $y^2=5x+10$; б) $x^2+y^2-2y-8=0$; в) $4x^2-9y^2=25$	2	а) $x^2=16y+2$; б) $x^2+25y^2=25$; в) $x^2-y^2=1$
3	а) $x^2=2-y$; б) $9x^2+25y^2=1$; в) $x^2-y^2+2y-2=0$	4	а) $y^2=4x-8$; б) $9x^2+y^2-2y-8=0$; в) $9x^2-64y^2=1$

Ном. вар.	Рівняння ліній	Ном. вар.	Рівняння ліній
5	а) $y^2 = 2x+1$; б) $4x^2+9y^2=25$; в) $x^2+4y^2-4y=0$	6	а) $x^2=-2y-2$; б) $16x^2+y^2=16$; в) $x^2+9y^2-2x=0$
7	а) $x^2=2y+2$; б) $x^2+y^2-4x-4=0$; в) $9x^2-4y^2-36=0$	8	а) $x^2=3y-6$; б) $9x^2+16y^2-144=0$; в) $x^2-y^2-6x+10=0$
9	а) $x=2y^2+6y$; б) $x^2+y^2+2y-3=0$; в) $x^2-4y^2-4x=0$	10	а) $y=x^2-5x$; б) $x^2+9y^2-6x=0$; в) $25x^2-16y^2=1$
11	а) $y^2=4x-8$; б) $x^2+y^2-4y+3=0$; в) $4x^2-y^2+4y-8=0$	12	а) $x^2=4-6y$; б) $x^2+9y^2+2x-8=0$; в) $9x^2-64y^2=1$
13	а) $y^2=4-6x$; б) $x^2+4y^2-2x-3=0$; в) $x^2-16y^2=16$	14	а) $-x^2=6y+2$; б) $4x^2+y^2+2y-3=0$; в) $4x^2-9y^2=1$
15	а) $x^2=2-3y$; б) $x^2+9y^2+4x-5=0$; в) $x^2-4y^2=1$	16	а) $x^2=4y+8$; б) $x^2+16y^2+2x-15=0$; в) $4x^2-y^2=1$
17	а) $y^2=2x-4$; б) $x^2+4y^2+6x+5=0$; в) $4x^2-9y^2-36y=0$	18	а) $x^2=2y+1$; б) $9x^2+y^2-2x-8=0$; в) $9x^2-y^2-2y=0$
19	а) $x^2=3y+3$; б) $x^2+9y^2-2x-8=0$; в) $x^2-3y^2=9$	20	а) $y^2=2-3x$; б) $x^2+4y^2+8x+12=0$; в) $16x^2-25y^2=1$
21	а) $y^2=3x-1$; б) $9x^2+y^2-2y-8=0$; в) $9x^2-4y^2=36$	22	а) $x^2=2-4y$; б) $x^2+y^2-4y-5=0$; в) $25x^2-y^2=25$
23	а) $x^2=4y+8$; б) $x^2+4y^2+6x+5=0$; в) $x^2-y^2=2$	24	а) $y^2=2x+8$; б) $4x^2+y^2-6y+5=0$; в) $-4x^2+y^2=4$

Ном. вар.	Рівняння ліній	Ном. вар.	Рівняння ліній
25	а) $y^2 = 2x - 6$; б) $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$; в) $-x^2 + 9y^2 = 9$		

Розв'язання

Навчальне видання

Робочий зошит
із дисципліни «Вища математика»
на тему «Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія»
для студентів усіх інженерних спеціальностей
денної форми навчання

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор С. М. Симоненко
Комп’ютерне верстання М. А. Руденко

Підписано до друку 20.07.2017, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2,43. Обл.-вид. арк. 2,09. Тираж 200 пр. Зам. №
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.